

Technischer Bericht Nr. 12

Über die Bestimmung von biegekritischen Drehzahlen
durch Modellversuche

II. Teil: Anwendung auf die Praxis

Prof. Dr. phil. P. MATTHIEU

Dipl.-Phys. H. MEWES

Ueber die Bestimmung von biegekritischen Drehzahlen
durch Modellversuche

2. Teil: Anwendung auf die Praxis

Zusammenfassung

Im ersten Teil dieser Untersuchungen wurden aufgrund theoretischer Betrachtungen Methoden entwickelt, nach welchen die kritischen Drehzahlen irgendwelcher Maschinenwellen mit und ohne Kreiselwirkung durch gewisse Modellversuche bestimmt werden können.

Demgegenüber befaßt sich der vorliegende zweite Teil mit der praktischen Durchführung solcher Versuche. Dabei spielt vor allem die Frage nach dem Material und der Herstellung der Modelle eine wichtige Rolle.

Aufgrund dieser Entwicklungen ist es dann also möglich, die biegekritischen Drehzahlen irgendwelcher Maschinenwellen durch einfache Modellversuche zu bestimmen. Besonders wertvoll erweist sich das neue Verfahren in komplizierten Fällen, bei denen andere Methoden versagen.

Heinrich-Hertz-Institut für Schwingungsforschung

Die Bearbeiter

gez.: P. Matthieu

gez.: H. Mewes

(Prof. Dr. phil. P. Matthieu)

(Dipl.-Phys. H. Mewes)

Der Abteilungsleiter

Der Institutsdirektor

gez.: P. Matthieu

gez.: Rothert

(Prof. Dr. phil. P. Matthieu)

(Prof. Dr.-Ing. G. Rothert)

Berlin-Charlottenburg, den 15. Mai 1957

1. Die zweckmäßige Herstellung der Modelle von Maschinenwellen für Biegeschwingversuche

Nach den im 1. Teil dieser Untersuchungen dargelegten Erörterungen erhebt sich nun die Frage, wie die Modelle, an denen die entsprechenden Biegeschwingversuche durchgeführt werden sollen, zweckmäßig anzufertigen sind. Wie gezeigt worden ist, kommt es darauf an, zu einer vorliegenden Maschinenwelle das Modell in solchen Größenordnungen herzustellen, die für Versuche im Labor angemessen sind. Die Änderungen in den Längsdimensionen - meist handelt es sich um Verkürzungen - und in den Querdimensionen, die durchaus verschieden gewählt werden können (und das wird praktisch auch meist der Fall sein), sind einerseits bedingt durch den zur Verfügung stehenden Raum und das vorhandene Material, andererseits durch die zu erwartende Frequenz der Schwingungen des Modells, die nicht außerhalb des Meßbereichs der zur Verfügung stehenden Meßgeräte liegen darf. Die Tatsache, daß die Modelle billig und werkstattmäßig leicht herstellbar sein müssen, bedingt eine geeignete Wahl des Modellmaterials; diese wiederum ist nicht ohne Einfluß auf die Größe der Eigenfrequenzen des Modells. Das Ausmaß dieser zum Teil einander entgegenwirkenden Einflüsse ist aus den in der ersten Untersuchung gegebenen Formelbeziehungen ersichtlich. In diesem und in den folgenden Abschnitten handelt es sich darum, einige Wege zu weisen, auf denen die bisher gefundenen Richtlinien praktisch zu verwirklichen sind.

In erster Linie stellt sich das Problem, solche Modelle leicht und einfach anzufertigen. Da die vorgegebene Welle meist mehrfach abgesetzt und an gewissen Stellen mit scheibenförmigen Massen und Trägheitsmomenten behaftet ist, wird auch die Modellwelle diese abgesetzte Form aufweisen; jedoch können die den Einzelmassen und -momenten entsprechenden Stücke eine andere als die Scheibenform aufweisen, was bei den Versuchen zur Ermittlung des Einflusses der Kreiselwirkung im allgemeinen sogar der Fall sein wird. Maße und Material des Modells seien nach den im nächsten und übernächsten Abschnitt anzugebenden Gesichtspunkten festgelegt. Die zwischen den Einzelmassen gelegenen zylindrischen Stücke der Modellwelle oder auch - wenn die Einzelmassen scheibenförmig, d. h. ebenfalls zylindrisch sind -

die ganze Welle könnten an sich aus dem Vollen gedreht werden. Dieser Weg erweist sich aber als langwierig und kostspielig und für den Fall, daß die Einzelmassen des Modells wie bei uns etwa quaderförmig sind, auch als prinzipiell nicht gangbar.

Es hat sich jedoch gezeigt, daß man die Teile der Welle einzeln herstellen und dann in der gewünschten Form zusammenkleben kann, wobei sich Araldit als Bindemittel als ganz besonders geeignet erwies. Je mehr die Welle aus Einzelteilen zusammengesetzt ist, um so leichter läßt sie sich an einer beliebigen Stelle trennen, um Abänderungen vorzunehmen oder neue Wellenstücke einzufügen. Jedoch wird man auch jetzt noch zusammenhängende zylindrische Stücke, deren Durchmesser nur um ein Geringes gestuft sind, aus einem Stück drehen.

Die Rechtfertigung eines solchen Verfahrens, d. h. der Nachweis, daß eine mehr oder weniger geklebte Welle einer aus dem Vollen gedrehten dem Schwingungsverhalten nach gleichwertig ist, wurde dadurch gegeben, daß eine Reihe von sonst gleichen Modellen einmal aus einem Stück hergestellt, zum anderen aus den Einzelteilen zusammengeklebt und sodann an ihnen Vergleichsmessungen durchgeführt wurden. Diese Vorversuche, zu denen beliebige und keineswegs auf praktisch gegebene Maschinenwellen bezogene Modelle gewählt wurden, sicherten die Durchführbarkeit eines solchen Verfahrens und schufen einige praktische Erfahrungen für die Herstellung und Klebetechnik dieser Modelle.

Zum Zusammenfügen der Einzelstücke erwiesen sich die Araldit-Bindemittel der Firma CIBA als besonders geeignet, und zwar im Hinblick auf die vorliegende Aufgabe am besten die Fabrikate Araldit 101 und Araldit 103, die beide keinen weiteren Aufwand erfordern, vor allem keinen erhöhten Druck und im Prinzip auch keine erhöhte Temperatur zum Aushärten, wenn auch die Aushärtung bei größeren als Zimmertemperaturen eine nicht unwesentliche Beschleunigung erfährt. Die beiden Mittel, die beide mit einem Härterzusatz versehen (am besten Härterzusatz 951 von der gleichen Firma) angewendet werden, unterscheiden sich in ihren Eigenschaften nur wenig, im Grunde nur durch die unterschiedliche Viskosität (Araldit 101 ist zähflüssig, Araldit 103 dünnflüssig). Die Handhabung der Klebemittel geschieht im wesentlichen nach der von der CIBA gegebenen Gebrauchsanweisung. Man

wählt zweckmäßig die obere Grenze der für die Härterzusätze angegebenen Gewichtsspanne (etwa 8 Gewichtsprozent bezogen auf das Klebemittel), um schnelle Aushärtung zu gewährleisten. Diese dauert dann bei Zimmertemperatur (ca 20° C) 24 bis 48 Stunden, bei 100° C 1 bis 2 Stunden und kann bei noch höheren Temperaturen bis auf einige Minuten herabgesetzt werden. Zu hohe Temperaturen haben allerdings leicht Blasen- und später Bruchbildung zur Folge. Zu sagen ist noch, daß die Gebrauchsdauer der fertig angesetzten Klebelösung mit höheren Härterbeigaben bei 1 bis 2 Stunden liegt und bei sich länger hinziehenden Arbeitsprozessen oft unerwünscht niedrig ist. Das Mittel 103 ist durch seine Düninflüssigkeit gegenüber dem zähen Mittel 101 etwas sparsamer im Gebrauch und weist nicht so leicht Lufteinschlüsse auf. Mit ihm lassen sich leichter die für unsere Schwingversuche erstrebenswerten dünnen Klebnähte herstellen. Unter Umständen kann jedoch die Zähflüssigkeit des Mittels 101 gerade erwünscht sein.

Unter Verwendung dieser Klebmittel wurde nun eine Reihe von Prüfmodellen hergestellt, derart, daß Stangen aus einer Al-Mg-Cu-Pb-Legierung 1- bis 16-mal aufgeschnitten und wieder zusammengeklebt wurden (wobei teilweise auch die Nahtstärke verändert wurde). Die ersten drei Eigenfrequenzen dieser Stäbe wurden gemessen und mit der berechneten und gemessenen Eigenfrequenz des unzerschnittenen, sonst aber gleichdimensionierten Stabes verglichen. Es wurde eine zweifach gelenkige Lagerung gewählt, die theoretisch leicht berechenbar sowie technisch schnell reproduzierbar ist und praktisch auch am häufigsten vorkommt. Ein Teil der Proben hatte den Durchmesser 20 mm, ein anderer 10 mm; die Längen wurden so gewählt, daß die drei Grundfrequenzen $f = 100 \text{ Hz}, 400 \text{ Hz}, 900 \text{ Hz}$ betragen (nach der Gleichung $\omega = 2\pi f = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{E \cdot I}{\rho \cdot q}}$, E Elastizitätsmodul, I Flächenträgheitsmoment, ρ Dichte, q Querschnitt). Die Schwingungsanregung der auf 2 Schneiden frei gelagerten Stäbe erfolgte mechanisch von oben mit dem Philips-Stift GM 5526 (Abb. 1 und 2), dessen Frequenzen durch den Tonfrequenz-Generator GM 2307 erzeugt werden. Die Anregung erfolgte etwas außerhalb der Mitte an einer Stelle, an der die ersten drei Eigenschwingungen keinen Schwingungsknoten haben. Zur Messung wurden die Schwingungen mechanisch mit dem induktiven Aufnehmer GM 5537 aufgenommen und die Frequenzen durch

Vergleich mit einem RC-Generator auf einem Oszillographen ermittelt.

Abb. 1 zeigt die Meßanordnung der verwendeten Geräte, Abb. 2 die Stablagerung mit Anregung (Mitte) und Geber (Schwingungsaufnehmer; rechts).

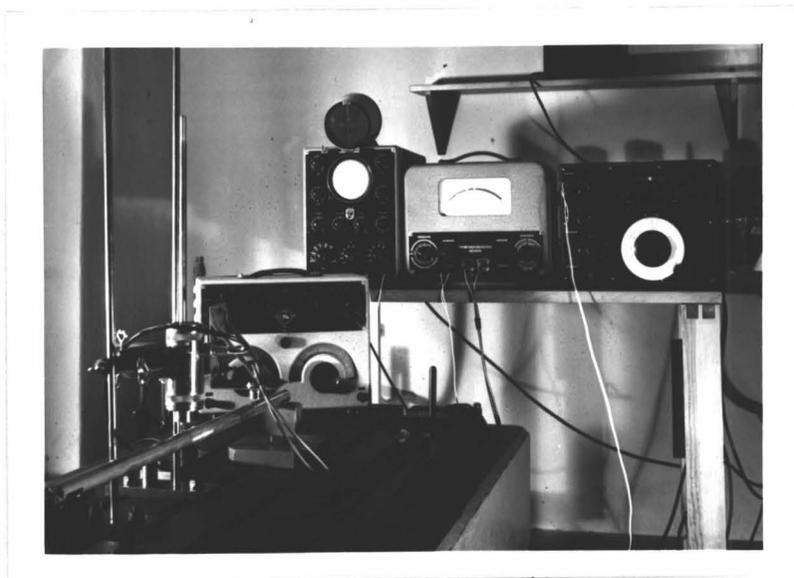


Abb. 1

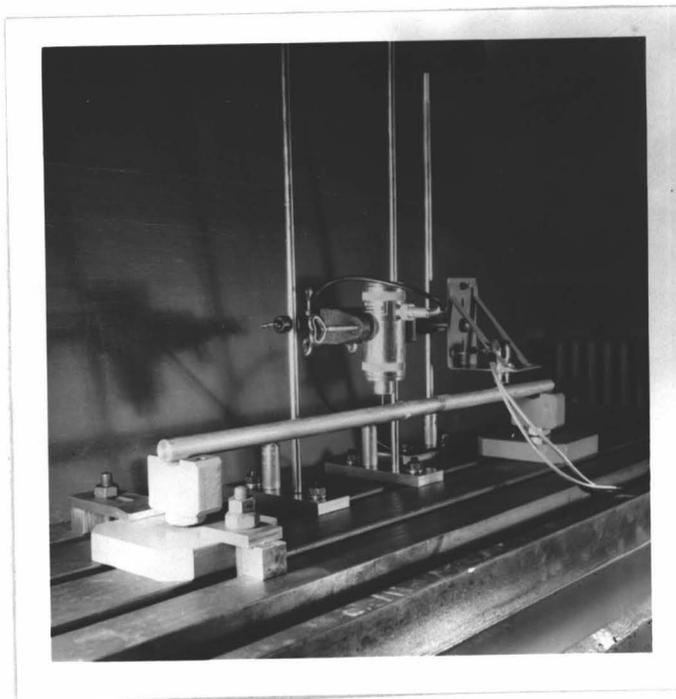


Abb. 2

Ohne im einzelnen die Meßergebnisse zahlenmäßig wiederzugeben, kann zusammenfassend gesagt werden, daß die Schwingungs-

versuche positiv ausgefallen sind, d. h., die Abweichungen der Eigenfrequenzen der geklebten Stäbe von denen der unzerschnittenen Stäbe lagen innerhalb der durch andere Ursachen bedingten Fehlergrenzen. Die zu erwartende Tendenz der Abweichung ist derart, daß eine Frequenzherabsetzung mit zunehmender Nahtstärke und zunehmender Zahl der Klebstellen eintreten wird, da erstarrtes Araldit gegen Metall einen wesentlich kleineren Elastizitätsmodul aufweist (500 kp/mm^2 gegen 7200 kp/mm^2) und also mehr oder weniger große Teile und damit der ganze Stab an Biegesteifigkeit einbüßen. Die Beobachtung bestätigt diese Annahme; bei Nahtstärken von 0,9 mm war im ungünstigsten Fall, wenn nämlich die Nahtstellen im Schwingungsbauch lagen, die größte Abweichung zu beobachten (ca 2,4 % nach unten, d. h. Frequenzverminderung). Wählt man also möglichst dünne Nahtstärken ($\leq 0,1 \text{ mm}$), die auch in jeder anderen Hinsicht (Festigkeit) günstiger und stets leichter zu verwirklichen sind, so liegt der Fehler unter 1 %, also unter dem Maß üblicher Fehlerstreuung. Die bei gewichtsmäßig kleineren Stäben auftretenden stärkeren Abweichungen konnten als Einfluß der Masse des Anregungsstiftes erklärt werden, die in diesem Falle nicht mehr als vernachlässigbar klein gegen die Stabmasse angesehen werden durfte. In einem solchen Fall kann mit Hilfe einer Magnetanregung (durch Aufbringen eines Eisenplättchens auf den nichtmagnetischen Probestab ermöglicht) die Messung fehlerfrei durchgeführt werden.

Zur Ergänzung dieser Beobachtungen wurde noch ein Scheibenmodell mit drei äquidistant aufgebrauchten gleichen scheibenförmigen Massen geklebt (Abb. 3) bzw. aus dem Vollen gedreht. Hier macht sich also bei Biegeschwingungen auch die Rotationsträgeit der Scheiben bemerkbar. Die Nahtstärke war $< 0,1 \text{ mm}$. Die Vergleichsmessungen fielen wieder im obigen Sinne positiv aus, der Fehler lag unter 0,5 %. Abb. 3 zeigt das Modell während des Trocknens der Klebstellen (mit Stativen gehalten).

Bei größeren und vielfach unterteilten Modellen, die statisch und dynamisch stärker beansprucht werden, haben die Klebnähte wegen der verhältnismäßig kleinen Stirnflächen der Trennstellen mitunter nur bei sorgfältigster Ausführung der Klebung die nötige Festigkeit. Es empfiehlt sich in einem solchen Fall (wie überhaupt bei Anwendung von Araldit) durch kon-

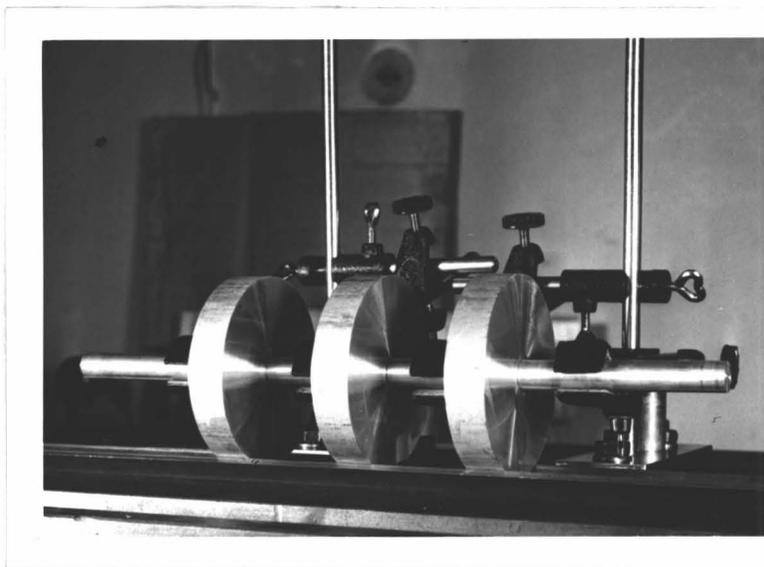


Abb. 3

struktiv geeignete Gestaltung der Verbundstellen größeren Halt zu gewährleisten. Ohne viel Aufwand kann man z. B. die beiden Stirnflächen anbohren und einen kleinen Stift dazwischensetzen.

Durch diese Vorversuche ist also die Angängigkeit eines solchen Klebverfahrens zur Herstellung von Modellen für Schwingungsmessungen gesichert.

2. Die Form der Modelle im Hinblick auf die Analogie zwischen Schwingungen und biegekritischen Drehzahlen

Nachdem nun eine Möglichkeit aufgezeigt worden ist, Schwingungsmodelle aus den Einzelteilen durch Zusammenkleben herzustellen, erhebt sich die Frage, wie die Form und die Größe dieser Modelle gewählt werden müssen, um die im 1. Teil dargelegten Analogieprinzipien zur Messung biegekritischer Drehzahlen bei Berücksichtigung der Kreiselwirkung zu verwirklichen. Die Größe des Einflusses der Kreiselwirkung bei kritischen Drehzahlen sowie der Rotationsträgheit bei Biegeschwingungen ist durch Zurückführung auf statische Betrachtungen gewonnen worden. Die Transformationsgleichungen für ein hinsichtlich der ursprünglichen Welle größen- und materialmäßig verändertes Modell ergaben sich aus den Gesetzen der Modellähnlichkeit. Und schließlich wiesen die Analogiebeziehungen zwischen Biegeschwingungen

und kritischen Drehzahlen den Weg zur experimentellen Ermittlung von kritischen Drehzahlen durch Biegeschwingversuche allein. Sind das Material, d. h. \bar{E} und $\bar{\rho}$ der biegsamen Teile der Modellwelle sowie die Maße, d. h. im wesentlichen m und n festgelegt, so muß für die starren Teile der Modellwelle (diese können aus einem anderen Material mit der Dichte $\bar{\rho}$ bestehen) eine geeignete Form gefunden werden, die Biegeschwingversuche unter Einbeziehung der Kreiselwirkung und solche unter Ausschluß derselben bei im übrigen unveränderten Verhältnissen zuläßt. Es war oben mehrfach betont worden, daß die Form der starren Teile durch andere als die eben genannten Bedingungen nicht vorgeschrieben ist, daß vielmehr lediglich die Masse und das Trägheitsmoment bestimmte, vorgegebene Größen haben müssen.

Wenn man nicht mehrere Modelle zur Durchführung dieser Versuche kleben will, so kann man, wie im 1. Teil im Zusammenhang mit Abb. 7 dargelegt, durch Wahl der Quaderform für die Einzelmassen und Einzelträgheitsmomente erreichen, daß mit ein und derselben Modellwelle Schwingversuche unter Einschluß und unter Ausschluß der Kreiselwirkung gemacht werden können. Die Kreiselwirkung bzw. die Rotationsträgheit kommt, wie gezeigt worden war, als an den schrägstehenden Scheiben angreifendes Drehmoment zur Geltung, und dieses ist dem Trägheitsmoment dieser Scheiben proportional. Schwingt die Modellwelle nun in der Ebene E (Abb. 4), welche durch die zu den kleinsten Trägheitsmomenten der Quader gehörigen Hauptachsen gegeben ist, so wird die Rotationsträgheit eines jeden Quaders durch dessen Trägheitsmoment um die in der Ebene F gelegene Hauptachse verursacht (entsprechend Achse I - I in Abb. 5). Soll die Rotationsträgheit dem Betrage nach der Kreiselwirkung gleich werden, so muß dieses Trägheitsmoment durch geeignete Dimensionierung der Quader gleich dem Wert gewählt werden, der durch die ursprüngliche Welle und die Gesetze der Modellähnlichkeit (Formel (1) bzw. (2)) festgelegt ist. Schwingt sodann das Modell in der gegen E um 90° gedrehten Ebene F, so daß die Längsausdehnungen der Stäbe sich senkrecht zur Schwingebene erstrecken, so ist das Trägheitsmoment der Stäbe um eine zur obigen entsprechende, jetzt in E gelegene Achse (Achse II - II in Abb. 5) auf einen so kleinen Wert zu bemessen, daß es gleich Null gesetzt werden

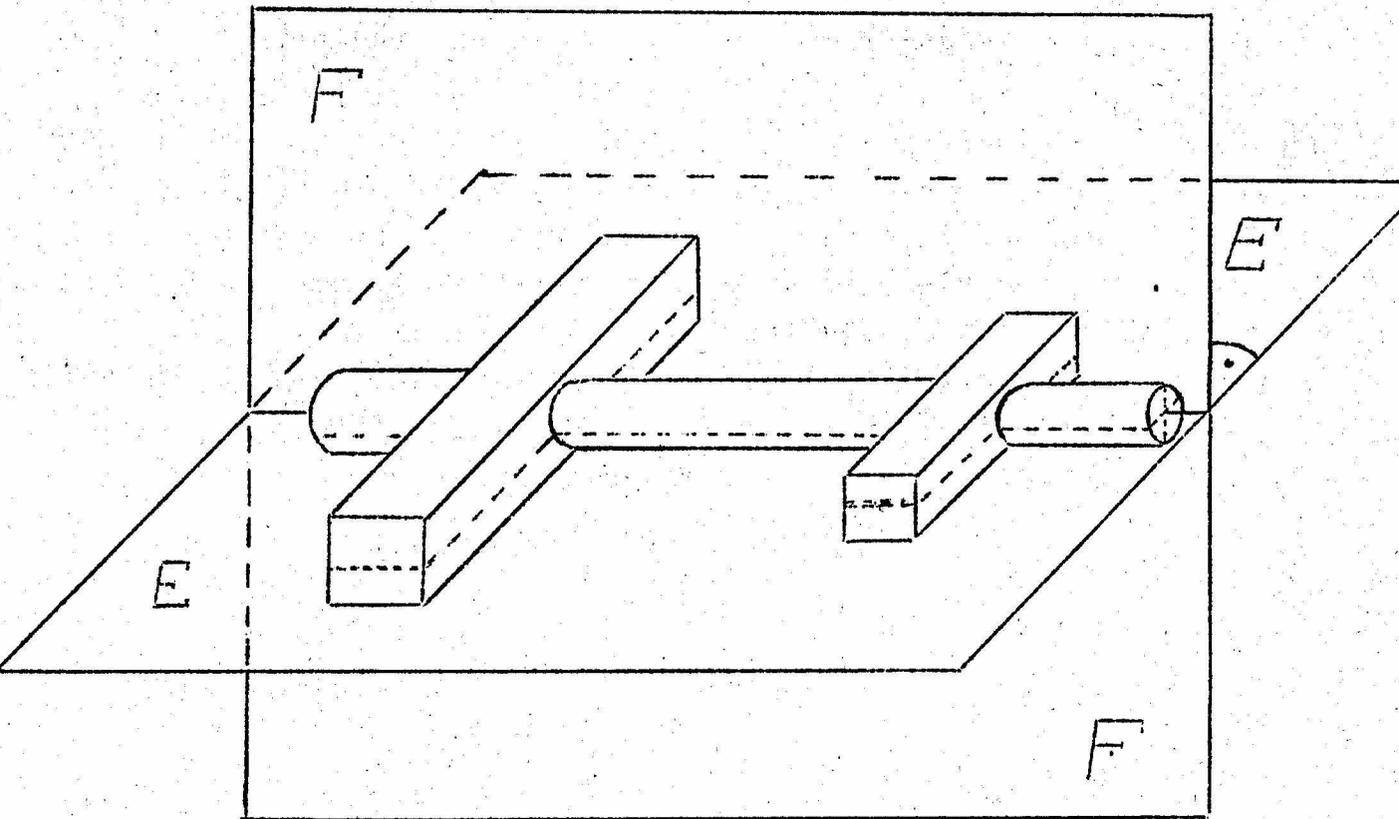


Abb. 4

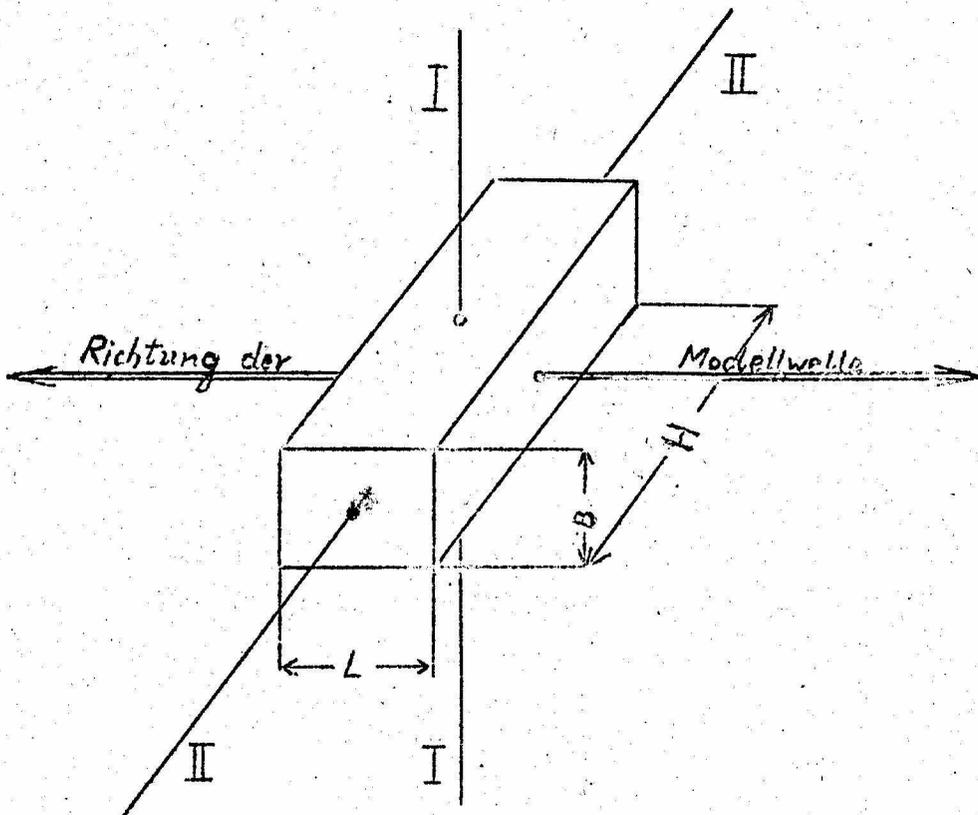


Abb. 5

kann. Dann ist also an den Stellen der starren Stücke zwar noch die Masse derselben erhalten, die Rotationsträgheit kommt aber nicht mehr zur Geltung.

Es ist also zu jedem starren Wellenstück ein Quader nach Abb. 5 derart zu konstruieren, daß seine Masse den Wert \bar{m}_{S_k} der Formel (30) bzw. (32) des 1. Teils hat. Gleichzeitig soll sein Trägheitsmoment $\bar{\Theta}_{S_k}$ bezüglich der Achse I - I, das für die Trägheitswirkungen bei Biegeschwingungen in der Ebene E (Abb. 4) in Rechnung zu stellen ist, dem ebenfalls in den genannten Formeln (30) und (32) des 1. Teils angegebenen Wert gleich sein, d. h., im Falle dicker Scheiben der ursprünglichen Welle muß gelten

$$\bar{\Theta}_{S_k} = \frac{\bar{\rho}}{9} n^3 \cdot m^2 \cdot (\pi_{S_k} - \Theta_{S_k}) \quad (1)$$

Für schmale Scheiben reduziert sich (1) auf (siehe Formel (33), 1. Teil)

$$\bar{\Theta}_{S_k} = \frac{\bar{\rho}}{9} n^3 \cdot m^2 \cdot \Theta_{S_k} \quad (2)$$

da dann bekanntlich $\pi_{S_k} = 2 \cdot \Theta_{S_k}$ ist.

Für das genannte Trägheitsmoment des Quaders gilt nun bei Zugrundelegung der in Abb. 5 eingetragenen Bezeichnungen, wenn $\bar{\rho}$ die Dichte des Quadermaterials ist, die leicht zu verifizierende bekannte Beziehung:

$$\bar{\Theta}_{S_k} = \frac{1}{12} \cdot L \cdot B \cdot H \cdot \bar{\rho} \cdot (L^2 + H^2) \quad (3)$$

Es ist nun aus schon genannten und noch zu nennenden theoretischen Gründen bei den Quadern stets $L \ll H$ zu wählen. Auch praktisch-konstruktiv lassen sich schmale Quader aus leicht zugänglichem Flachmaterial schnell und unter Rückgriff auf geeignete Abmessungen ohne Fräsarbeit herstellen. Mit $L \ll H$ ist aber erst recht $L^2 \ll H^2$ und (3) läßt sich unter Vernachlässigung von L^2 gegen H^2 schreiben:

$$\bar{\Theta}_{S_k} = \frac{1}{12} \cdot L \cdot B \cdot H^3 \cdot \bar{\rho} = I \cdot L \cdot \bar{\rho} \quad (4)$$

wobei I das äquatoriale Flächenträgheitsmoment des Quaders ist.

Mit diesem Wert für $\bar{\Theta}_{S_k}$ vereinfachen sich die weiteren Rechnungen außerordentlich; der Fehler ist minimal und innerhalb der durch andere Vernachlässigungen gegebenen Grenzen gelegen. (In durchschnittlichen Fällen gilt ungefähr: $L = \frac{1}{20} H$, also $L^2 = \frac{1}{400} H^2$, d. h., wir haben einen Fehler von 0,4 %).

Nach dem Gesagten ist im Hinblick auf die Art der Versuche bei der Konstruktion der Quader witer darauf zu achten, daß das bezüglich der Achse II - II (Abb. 5) gültige Trägheitsmoment - $\bar{\Theta}_{S_k}^*$ genannt - auf einen so kleinen Wert herabsinkt, daß es gegenüber dem nach Formel (3) berechneten Wert vernachlässigbar ist. Wenn unter \ll verstanden wird, daß bei Vernachlässigung der ersten Größe gegenüber der zweiten nicht der Rahmen der durch andere Gesichtspunkte gegebenen Genauigkeitsgrenze verlassen wird, muß also die Beziehung gelten

$$\bar{\Theta}_{S_k}^* \ll \bar{\Theta}_{S_k} \quad (5)$$

oder ausgeschrieben:

$$\frac{1}{12} \cdot H \cdot B \cdot L \cdot \tilde{\varrho} \cdot (L^2 + B^2) \ll \frac{1}{12} \cdot H \cdot B \cdot L \cdot \bar{\varrho} \cdot (L^2 + H^2) \quad (5a)$$

woraus folgt: $B^2 \ll H^2$, also schließlich $B \ll H$. Ferner war gefordert worden, daß L klein ist, da die Einzelmassen in dem einen Schwingfall (ohne Rotationsträgheit) möglichst punktförmig auf der Welle angeordnet sein sollen. Bedenkt man noch, daß im allgemeinen das Material der starren Stücke weder das der ursprünglichen Welle mit der Dichte ϱ , noch das der Modellwelle mit der Dichte $\bar{\varrho}$ zu sein braucht, sondern ein drittes der Dichte $\tilde{\varrho}$ sein kann (denn die Formeln (30) bis (33) und insbesondere (31) des 1. Teils wurden auf Grund des Verhaltens der biegsamen Teile abgeleitet), so muß also nach dem Gesagten im Hinblick auf (30) bzw. (32) des 1. Teils gelten:

$$\bar{m}_{S_k} = L \cdot B \cdot H \cdot \tilde{\varrho} = \frac{\bar{\varrho}}{\varrho} \cdot n \cdot m^2 \cdot m_{S_k} \quad (6)$$

$$\bar{\Theta}_{S_k} = I \cdot L \cdot \tilde{\varrho} = \frac{1}{12} \cdot B \cdot H^3 \cdot L \cdot \tilde{\varrho} = \frac{\bar{\varrho}}{\varrho} \cdot n^3 \cdot m^2 \cdot \Theta_{S_k} \quad (7)$$

(wobei im Falle dicker Scheiben Θ_{S_k} durch $\Pi_{S_k} - \Theta_{S_k}$ zu ersetzen ist, im übrigen aber alles genauso bleibt). Daraus folgen für die Maße des Quaders die Beziehungen:

$$H = \sqrt{12} \cdot n \cdot \sqrt{\frac{\Theta_{S_k}}{m_{S_k}}} \quad (8)$$

$$L \cdot B = \frac{1}{\sqrt{12}} \cdot m^2 \cdot \frac{\bar{\varrho}}{\varrho} \cdot \frac{m_{S_k}}{\varrho} \cdot \sqrt{\frac{m_{S_k}}{S_k}} \quad (9)$$

Bei zwei Gleichungen für drei Unbekannte bleibt natürlich eine Größe, in unserem Falle L oder B, frei wählbar. Man sieht an der Gleichung (9), daß die Forderung, L und B, also auch das Produkt L·B klein zu halten, bei gegebenen Zahlenwerten von m_{S_k} und Θ_{S_k} durchaus nicht immer zu erfüllen wäre, wenn nicht durch die Modellabbildung der Faktor m^2 in die Rechnung eintritt und demnach weitgehend im Hinblick auf diese Forderung gewählt werden muß. Eine weitere Möglichkeit zur Herabsetzung des (meist zu großen) Produktes L·B ergibt sich im Auftreten der Größe $\bar{\varrho}$ im Nenner, dadurch nämlich, daß nicht $\bar{\varrho} = \varrho$ (Quadermaterial gleich dem Material der biegsamen Teile der Modellwelle), sondern $\bar{\varrho} > \varrho$ gemacht wird. Damit ist die Rechtfertigung der Einführung eines anderen Quadermaterials gegeben. In gleicher Weise bietet n die Möglichkeit zur geeigneten Modifizierung von H.

Sind n und m durch sonstige Umstände schon festgelegt, so kann man den gestellten Bedingungen oft nur in anderer Weise genügen. Man kann entweder die Herstellung zweier Modelle erwägen, oder aber im Anschluß an das im Zusammenhang mit Formel (51) ff (1. Teil) Gesagte die starren Teile der Modellwelle so bauen, daß ihr Trägheitsmoment in dem einen Fall der Schwingungen nicht völlig Null wird, sondern nur auf einen gewissen Bruchteil des für den anderen Schwingfall gültigen Wertes herabsinkt. Diese letzte Möglichkeit ist bei unseren für diese Untersuchung durchgemessenen Beispielen nicht ausgenutzt worden. Auf andere Einzelheiten soll an Hand von konkreten Beispielen im folgenden Abschnitt eingegangen werden.

3. Nähere Ausführung an drei Beispielen

Um diese Verhältnisse im einzelnen zu prüfen, sind im Zusammenhang mit dieser Untersuchung drei besondere Fälle näher in Betracht gezogen worden. Bei einem ersten, mehr theoretischen Beispiel, sind die ersten drei Biegeschwingungseigenfrequenzen sowie die kritischen Drehzahlen mit und ohne Kreiselwirkung zur Kontrolle mathematisch exakt berechnet worden, wodurch ein sicheres Maß für die Größenordnung der Kreiselwirkung gefunden ist. Weiterhin ist hierzu ein Modell geklebt und durchgemessen worden.

Tritt bei diesem ersten Beispiel im wesentlichen die Kreiselwirkung einer einzelnen starren Scheibe auf, so sollte an einem zweiten der Einfluß einer größeren Anzahl starrer Scheiben beobachtet werden. Das dritte Beispiel schließlich entspricht völlig einem Fall der Praxis, d. h., zu einer in den Maßen vorgegebenen Maschinenwelle wird genau nach dem in Abschnitt 2. angegebenen Weg ein Modell konstruiert.

1. Beispiel:

Zweifach gelenkig gelagerter Stab mit einer Scheibe

Als erstes werde das folgende Beispiel untersucht. Nach Art der Abb. 6 sei ein zweifach gelenkig gelagerter Stab vorgegeben. An einem Lager befindet sich eine dünne Scheibe mit der Masse m und dem axialen Trägheitsmoment Θ . Die Gleichung des transversal schwingenden Stabes ist wie üblich:

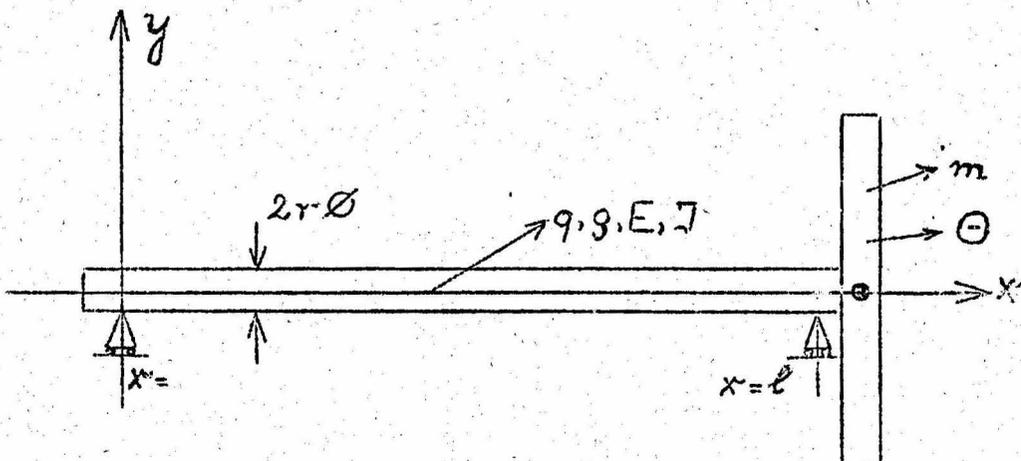


Abb. 6

$$\frac{\partial^4 Y(x,t)}{\partial x^4} + \frac{g \cdot \varrho}{E \cdot I} \cdot \frac{\partial^2 Y(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

die mit dem Ansatz $Y(x,t) = y(x) \cdot \sin \omega t$ und der Abkürzung:

$$\kappa^4 = \frac{g \cdot \varrho}{E \cdot I} \cdot \omega^2 \quad (11)$$

übergeht in:

$$y^{IV} - \kappa^4 \cdot y = 0 \quad (12)$$

Dazu treten für Biegeschwingungen die Randbedingungen (wir nehmen für die Rechnung die Einzelmasse genau im Lager an):

$$\left. \begin{array}{l} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \\ \text{oder mit (11):} \end{array} \right\} \begin{array}{l} y''(0) = 0 \\ E \cdot I \cdot y''(l) = \Theta \cdot \omega^2 \cdot y'(l) \\ y''(l) = \frac{\Theta}{g \cdot \varrho} \cdot \kappa^4 \cdot y'(l) \end{array} \quad (13)$$

Zur Lösung von (12) macht man den Ansatz:

$$y(x) = A \cdot \sin \kappa x + B \cdot \cos \kappa x + C \cdot \sin \kappa x + D \cdot \cos \kappa x \quad (14)$$

Durch Einsetzen der Randbedingungen für $x = 0$ folgt $B = D = 0$.
In die verbleibende Gleichung

$$y(x) = A \cdot \sin \kappa x + C \cdot \sin \kappa x \quad (15)$$

werden die Randbedingungen für $x = l$ eingesetzt; dies führt auf die Gleichungen

$$\begin{aligned} A \cdot \sin \kappa l + C \cdot \sin \kappa l &= 0 \\ A \cdot (-\kappa^2 \cdot \sin \kappa l) + C \cdot \kappa^2 \cdot \sin \kappa l &= \frac{\Theta}{g \cdot \varrho} \cdot \kappa^4 \cdot (A \cdot \kappa \cdot \cos \kappa l + C \cdot \kappa \cdot \cos \kappa l) \end{aligned}$$

oder

$$\left. \begin{array}{l} A \cdot \sin \kappa l + C \cdot \sin \kappa l = 0 \\ A \cdot \left(\frac{\Theta}{g \cdot \varrho} \cdot \kappa^3 \cdot \cos \kappa l + \sin \kappa l \right) + C \cdot \left(\frac{\Theta}{g \cdot \varrho} \cdot \kappa^3 \cdot \cos \kappa l - \sin \kappa l \right) = 0 \end{array} \right\} (16)$$

Ein solches homogenes Gleichungssystem hat nur dann nichttriviale Lösungen, wenn die Koeffizientendeterminante verschwindet. Diese

Forderung zieht, wenn noch $\kappa \ell = \xi$ gesetzt wird, die Gleichung nach sich:

$$\text{ctg } \xi - \text{ctg } \xi = \frac{2 \cdot g \cdot q \cdot \ell^3}{\Theta} \cdot \frac{1}{\xi^3} \quad (17)$$

Eine völlig gleiche Betrachtung gilt für die kritischen Drehzahlen, lediglich in den Randbedingungen (13) ist die letzte Forderung zu ändern in

$$y''(\ell) = - \frac{\Theta}{g \cdot q} \cdot \kappa^4 \cdot y'(\ell) \quad (13a)$$

Dadurch ergibt sich für die kritischen Drehzahlen die Frequenzgleichung:

$$\text{ctg } \xi - \text{ctg } \xi = - \frac{2 \cdot g \cdot q \cdot \ell^3}{\Theta} \cdot \frac{1}{\xi^3} \quad (18)$$

(im Nenner genauer: $\pi - \Theta$, bei schmalen Scheiben jedoch wieder Θ).

Die numerische Auswertung dieser Gleichungen ergibt in Zusammenstellung mit den für den einfachen Stab ohne Kreiselwirkung geltenden Werten, die in bekannter Weise aus der Beziehung

$$\omega_n = \sqrt{\frac{E \cdot I}{g \cdot q} \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{\ell^2}} \quad (19)$$

zu errechnen sind und dann zugleich kritische Drehzahlen und Biegeschwingeigenfrequenzen darstellen, eine Uebersicht über die Größe des Einflusses der Kreiselwirkung. Es sind im ganzen zwei Varianten untersucht worden; bei der ersten befand sich an einem Ende einer Stange aus einer Aluminiumlegierung ($E = 7,2 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$; $g = 2,8 \text{ g/cm}^3$) von 90 cm Länge und 1 cm \varnothing ein Quader mit dem Trägheitsmoment $\bar{\Theta}_{Sk} = \Theta = 888 \text{ gcm}^2$ (entsprechend dem Trägheitsmoment einer 1 cm dicken Scheibe aus gleichem Material mit dem Durchmesser 9 cm); bei der zweiten Variante vergrößerte sich das Trägheitsmoment, d. h. auch der Einfluß der Kreiselwirkung auf das 8-fache (entsprechend einer Scheibe von z. B. 1,35 cm Stärke und 14 cm Durchmesser). Der quaderförmige Ersatzkörper braucht bei diesem ersten Beispiel nur das Trägheitsmoment der ursprünglichen Scheibe zu haben, nicht aber deren Masse; denn die durch die Trägheit entstehende Einzelkraft $P_S = m_S \cdot y_S \cdot \omega^2$ wird wegen $y_S = y(\ell) = 0$ (Formel (3), 1. Teil) stets $P_S = 0$.

Als wichtiges Ergebnis ergab sich zunächst eine (innerhalb der Meßgenauigkeit) völlige Uebereinstimmung zwischen Rechnung und dazu durchgeführten Versuchen. Die Einzelergebnisse sind die folgenden (in Hz):

a) Variante 1 (relativ kleine Kreiselwirkung)

Biegeschwingung mit einer der Kreiselwirkung entsprechen den Rotationsträgheit	Biegeschwingung und kritische Drehzahl ohne Kreiselwirkung	Kritische Drehzahl mit Kreiselwirkung
--------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------	---------------------------------------

$f_1 = 24,22$	$f_1 = 24,35$	$f_1 = 24,49$
$f_2 = 95,23$	$f_2 = 97,40$	$f_2 = 99,55$
$f_3 = 207,50$	$f_3 = 219,15$	$f_3 = 228,45$

b) Variante 2 (8-fach größere Kreiselwirkung)

Biegeschwingung mit einer der Kreiselwirkung entsprechen den Rotationsträgheit	Biegeschwingung und kritische Drehzahl ohne Kreiselwirkung	Kritische Drehzahl mit Kreiselwirkung
--------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------	---------------------------------------

$f_1 = 23,32$	$f_1 = 24,35$	$f_1 = 25,42$
$f_2 = 79,91$	$f_2 = 97,40$	$f_2 = 109,40$
$f_3 = 150,60$	$f_3 = 219,15$	$f_3 = 248,10$

Die für dieses und auch die beiden anderen Beispiele verwendete Meßmethode nebst den entsprechenden Geräten ist dieselbe, wie sie im 1. Abschnitt angegeben und durch die Abbildungen 1 und 2 erläutert wurde. Frequenzen unter 120 bis 150 Hz lassen sich jedoch unter Verwendung eines Oszilloskopripen auch direkt aufzeichnen und auszählen. Mit Hilfe des beim HHI angeschafften Oszilloskopripen sind derartige Messungen durchgeführt worden. Als Beispiele zeigt Abb. 7 Ausschnitte aus den auf diese Weise erhaltenen Oszillogrammen für die erste Oberfrequenz der Biegeschwingungen des hier besprochenen Stabes, und zwar links für die Variante 1 (Quader kleiner Rotationsträgheit am Stabende) und rechts für die Variante 2 (Quader größerer Rotationsträgheit am Stabende), (entsprechend den Werten f_2 der linken Spalte obiger Tabelle). Um die Frequenzen auszählen zu können, wurde eine Ver-

gleichsfrequenz von 50 Hz (jeweils rechts auf dem Oszillogramm) dazu aufgezeichnet. Etwas weniger genau könnte die Auszählung auch auf Grund des bekannten Papiervorschubs (in diesem Falle: 200 mm/sec) erfolgen. Die über eine hinreichend große Papierstrecke durchgeführte Auszählung ergab wieder $f_2 = 95,2$ Hz (links) bzw. $f_2 = 80$ Hz (rechts).

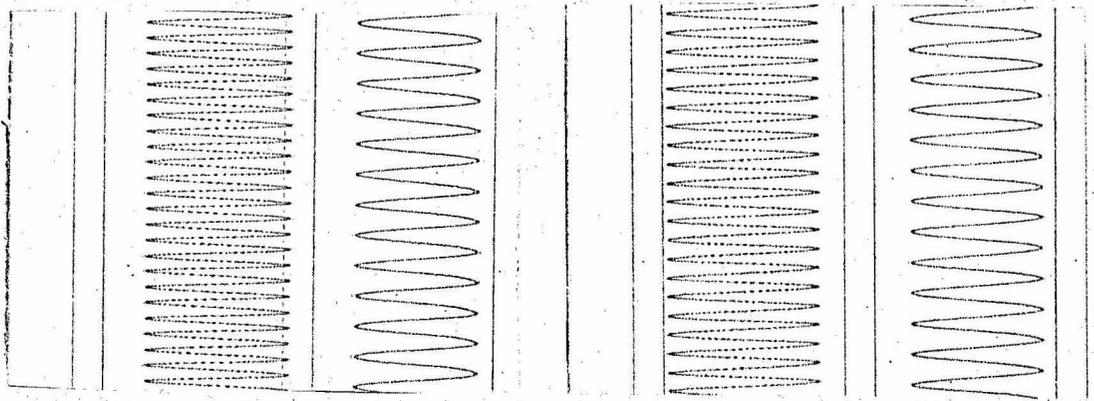


Abb. 7

Man findet durch diese Zahlenwerte die im 1. Teil der Arbeit gemachten Angaben über den Einfluß der Kreiselwirkung bestätigt. Er ist für die Grundfrequenzen klein; die durch die Rotationsträgheit bedingte Frequenzverminderung für die Biegeschwingungen ist dann auch von genau gleicher Größe wie die entsprechende, durch Kreiselwirkung bedingte Erhöhung der kritischen Drehzahlen. Bei der 1. Variante mit einem kleinen Trägheitsmoment des Aufsatzkörpers machen sich die Abweichungen praktisch erst bei der zweiten Oberschwingung bemerkbar. Wird das Trägheitsmoment der starren Scheibe größer (2. Variante), so ist nur noch für den ersten Eigenwert die durch den Einfluß der Kreiselwirkung bedingte Abweichung unterhalb der 10%-Grenze gelegen (im 1. Teil der Arbeit wurde auf diese hingewiesen) und demnach dem Betrage nach gleich wie bei der Biegeschwingung.

2. Beispiel:

Zweifach gelenkig gelagerter Stab mit 10 äquidistant aufgebrachten gleichen Scheiben

War beim vorangegangenen Versuchsmodell eine einzige Scheibe mit ihrer Kreiselwirkung zu dem einfachen Stab hinzugetreten, so sollen jetzt 10 starre Scheiben auf der Welle sitzen. Vorgegeben sei für unser Beispiel eine Welle aus einer Al-Cu-Mg-Pb-Legierung ($\rho = 2,8 \text{ g/cm}^3$, $E = 7,2 \cdot 10^5 \text{ kp/cm}^2$) des Durchmessers 15 mm und der Länge 65 cm, auf der im Abstand von 5 cm 10 gleiche Aluminiumscheiben (100 mm \varnothing , Stärke 10 mm) aufgebracht sind. An Wellen dieser Größe, wozu auch das vorhergehende, als erstes aufgeführte Beispiel gehört, können selbstverständlich Biegeschwingversuche direkt durchgeführt werden, wobei jedoch die Rotationsträgheit in vollem Maße zur Geltung kommt. Bei einem Modell wird man zweckmäßigerweise von einer Maßstabsverzerrung absehen (also in den obigen Transformationsformeln wird $m = n = 1$). Die der Modellwelle anstelle der Scheiben einzufügenden Quader brauchen in diesem Falle den Scheiben der ursprünglichen Welle lediglich massengleich zu sein. Um nicht zu große Dimensionen entstehen zu lassen, wurde Messing als Quadermaterial gewählt. Vollführt das gemäß Abb. 4 in der Ebene E orientierte Modell Biegeschwingungen in der Ebene F, so sind an den Stellen der ursprünglichen Scheiben zwar noch deren Massen, nicht aber mehr die die Kreiselwirkung nach sich ziehenden Trägheitsmomente vorhanden. (Eine genaue Rechnung zeigt, daß bei den bei uns gewählten Dimensionen das Trägheitsmoment in dieser Anordnung auf 3 % des Wertes der Scheibe herabgesunken ist.) Bei den gegebenen Maßen ist für die Messingquader bei Vorgabe von $L = 1 \text{ cm}$ (gleich der Stärke der entsprechenden Al-Scheiben), $B = 1,5 \text{ cm}$ der Wert $H = 17,25 \text{ cm}$ zu wählen. Die Versuche an der ursprünglichen und der Modellwelle liefern also die Biegeschwingeigenfrequenzen mit bzw. ohne Rotationsträgheit, und man kann gemäß unseren Ueberlegungen auf die kritischen Drehzahlen mit Kreiselwirkung schließen.

Macht man ähnlich wie im ersten Beispiel eine Zahlenzusammenstellung der Meßergebnisse dieser Versuche, so zeigt sich, daß die Frequenzherabsetzung bei der Biegeschwingung in-

folge der Rotationsträgheit der starren Stücke für die Grundschwingung 1,55 % und für die erste Oberschwingung 2,8 % ausmacht (bezogen auf die Werte ohne Rotationsträgheit). Die sich daraus ergebenden kritischen Drehzahlen mit Berücksichtigung der Kreiselwirkung sind dann: $f_1 = 39,3$ Hz und $f_2 = 110$ Hz. Für die nächste Frequenz liegt der Einfluß über 10 %, die kritische Drehzahl (mit Kreiselwirkung) kann also nur noch größenordnungsmäßig erschlossen werden. Darauf sei hier verzichtet.

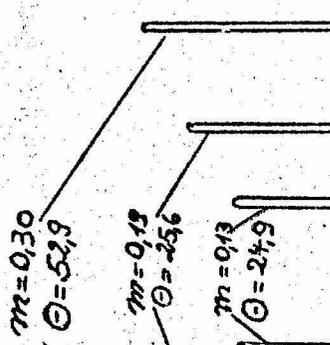
3. Beispiel:

Doppelflutiger Niederdruckläufer einer Kondensationsturbine

Als 3. Beispiel wurde ein Turbinenläufer zur Untersuchung herangezogen (Abb. 8). Die Berechnung des Modells, an dem nun Biegeschwingversuche sowohl mit als auch ohne Kreiselwirkung durchführbar sein sollen, erfolgt ganz nach den im 2. Abschnitt angestellten Betrachtungen. Das Material des gegebenen Läufers war Stahl ($\rho = 7,85$ g/cm³, $E = 2,1 \cdot 10^6$ kp/cm², und zwar sowohl der biegsamen Teile wie der starren Stücke). Für die biegsamen Teile des Modells wurde die auch bei den anderen Modellen schon verwendete Al-Cu-Mg-Pb-Legierung (Rundmaterial) gewählt; für die als starr anzusehenden Scheiben ist beim Modell Flachmessing quaderförmig (trägheits- und massengleich) eingefügt worden ($\rho = 8,5$ g/cm³). Die über 5 m lange und rund 1/2 m starke Welle, die mehrfach abgesetzt ist und in der Mitte 6 Schaufelräder trägt, läßt sich in der auf Seite 19 in Abb. 8 dargestellten 14-feldrigen Anordnung schematisieren. Als Reduktionsfaktoren für die Längs- und Querdimensionen wurden gewählt: $n = 1/5$, $m = 1/15$. Damit wird man allen an das Modell zu stellenden Bedingungen (in Abschnitt 2 näher ausgeführt) gerecht. Es erübrigt sich, auf die Einzelheiten der Ausrechnung der Modellmaße einzugehen; lediglich die Maße der an Stelle der starren (schmalen) Scheiben aus Flachmessing zusammengefügtten Quader seien angeführt:

$$m: \left[\frac{t \cdot \text{sec}^2}{m} \right]$$

$$\Theta: [10^{-3} \cdot t \cdot m \cdot \text{sec}^2]$$



Einzel-
massen

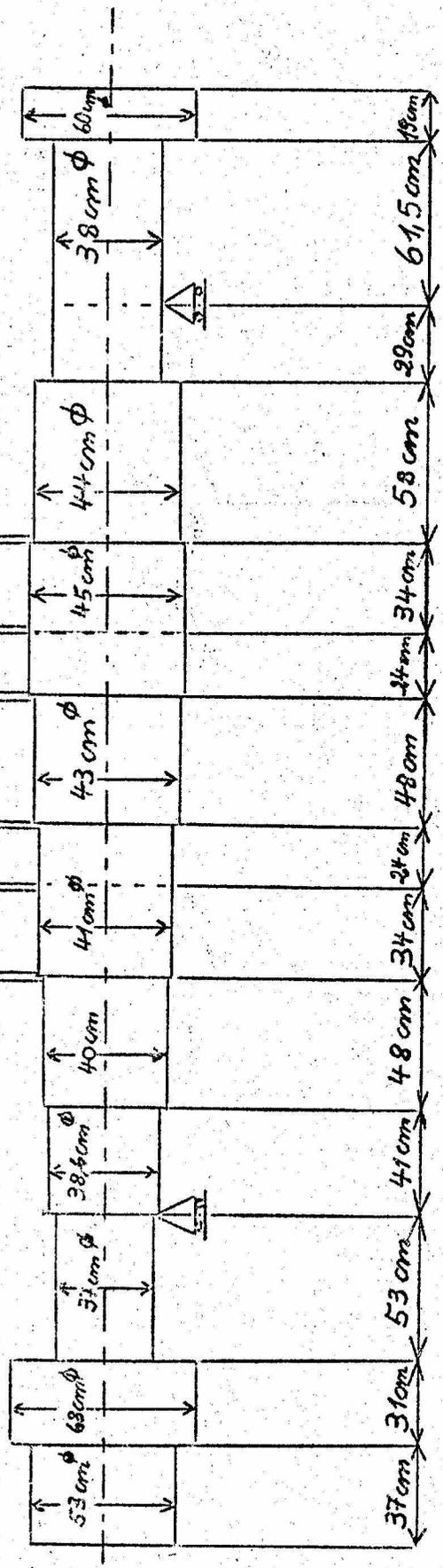


Abb. 8

Quader zu den Scheiben I und VI:

$$H = 29,2 \text{ cm} \quad L = 1,5 \text{ cm} \quad B = 2,5 \text{ cm}$$

Quader zu den Scheiben II und V:

$$H = 25,4 \text{ cm} \quad L = 1,0 \text{ cm} \quad B = 2,5 \text{ cm}$$

Quader zu den Scheiben III und IV:

$$H = 30,6 \text{ cm} \quad L = 0,5 \text{ cm} \quad B = 3,0 \text{ cm}$$

Die Mittelwerte der ersten drei Frequenzen, gemessen bei Schwingungen unter Ausschluß der Rotationsträgheit (Ebene F in Abb. 4), waren für dieses Modell

$$f_1 = 36,5 \text{ Hz} \quad f_2 = 115,5 \text{ Hz} \quad f_3 = 305 \text{ Hz}$$

Durch den Einfluß der Rotationsträgheit (Schwingungen in der Ebene E, Abb. 4) sanken diese Werte auf:

$$f_1 = 35,8 \text{ Hz} \quad f_2 = 111,7 \text{ Hz} \quad f_3 = 271,8 \text{ Hz}$$

d. h., die Herabsetzung betrug 1,9 % bzw. 3,3 % bzw. 10,9 %. Die entsprechende Erhöhung der Frequenzwerte liefert für die kritischen Drehzahlen mit Kreiselwirkung für die beiden ersten Werte: $f_1 = 37,2 \text{ Hz}$ bzw. $f_3 = 119,3 \text{ Hz}$; (bei f_3 ist wieder nur eine Größenordnungsabschätzung zulässig).

Diese Werte gelten für die Modellwelle. Da aber das Modell des dritten Beispiels unter Material- und Maßtransformation konstruiert wurde, schwingt es nach Formel (31) des 1. Teils λ -mal schneller als die ursprüngliche Welle, wobei λ den Wert hat:

$$\lambda = \sqrt{\frac{E \cdot g}{E \cdot \bar{g}}} \frac{m}{n^2} \quad (20)$$

Mit den angegebenen Zahlenwerten erhält man für λ den Wert: $\lambda = 1,64$. Die mit der Kreiselwirkung der starren Scheiben entstehenden kritischen Drehzahlen der ursprünglichen Welle ergeben sich also durch Multiplikation mit $1/\lambda$ aus den oben für die Modellwelle angegebenen Werten zu: $f_1 = 22,7 \text{ Hz}$ und $f_2 = 72,8 \text{ Hz}$.

An diesen drei Mustermodellen wurde die Größe des Einflusses der Kreiselwirkung auf die kritischen Drehzahlen im Hinblick auf die zuvor dargelegte Theorie ermittelt.

So wie die kritischen Drehzahlen selber hängen auch deren Beeinflussungen durch die Kreiselwirkung von der Anzahl und den Stellen der auf der Welle sitzenden starren Stücke ab. Auch die sonstige Gestalt (Abstufungen) und die Lagerungsart sind ausschlaggebend. Ein genaues Bild liefern in jedem Fall die beschriebenen Modellversuche, die auch in komplizierten Fällen (mehrfache Lagerung; fliegende Anordnung (siehe 3. Beispiel)) leicht und schnell durchzuführen sind und im Gegensatz zu den meisten Rechenverfahren mit der Grundfrequenz am gleichen Modell ohne weiteren Aufwand die Oberfrequenzen zu ermitteln gestatten. Lediglich eine auftretende Kreiselwirkung ist schon bei der Konstruktion des Modells besonders zu berücksichtigen, wie dies in der vorliegenden Untersuchung ausführlich behandelt wurde.